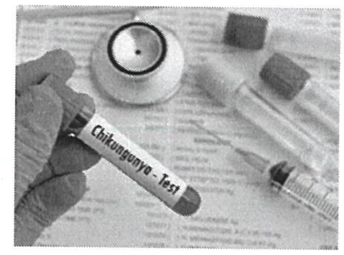
Exercice du test de dépistage



Le Chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées. Un test salivaire a été mis au point pour son dépistage. Une étude est menée sur 2000 personnes pour vérifier l'efficacité de ce test. On a observé que :

- 15 % des personnes testées sont effectivement atteintes par le virus
- 2 % des personnes atteintes par le virus ont eu un test négatif
- 1 % des personnes non atteintes par le virus ont eu un test positif

On parle de « faux négatif » lorsqu'une personne atteinte par le virus a un test négatif et de « faux positif » lorsqu'une personne non atteinte par le virus a un test positif. Pour que ce test soit considéré comme efficace, on souhaite que :

a) La part de faux négatifs parmi les tests négatifs soit inférieure à 1 %
b) La part de faux positifs parmi les tests positifs soit inférieure à 5 %

Le test remplit-il ces deux critères d'efficacité ?

Attention, lorsqu'on travaille avec des pourcentages, on doit faire très attention à ce qui vient après le signe « % ».

Exemple : « 2 % **des personnes atteintes par le virus** ont eu un test négatif. » Cela veut dire que les faux négatifs représentent 2 % parmi l'ensemble des personnes malades. On ne peut donc pas conclure que le premier critère n'est pas rempli. En effet, c'est la proportion de faux négatifs parmi l'ensemble des tests négatifs qui doit être inférieure à 1 % !

Pour calculer cette proportion, on peut s'aider en remplissant un **tableau croisé d'effectifs**.

	Test positif	Test négatif	Total
Malades	294	6 (B)	300 (A)
Pas malades	17 (C)	1683	1700
Total	311	1689	2000

Remarque : La colonne et la ligne nommées «Total» sont appelées les ***marges*** *du tableau*

(A) $0,15 \times 2000 = 300$

(B) $0,02 \times 300 = 6$

(C) $0,01 \times 1700 = 17$

critère a) : la part de faux negatifs parmi les testes negatifs est : $\frac{6}{1689} \approx 0,004 = 0,4\ \%$

critère B) : la part de faux positif parmi les test positif est : $\frac{17}{311} = 0,055 = 5,5\ \%$

Conclusion : seul le critère a) est vérifié

→ **Tableau des fréquences marginales**

On divise chaque case du tableau d'effectif par l'effectif total. Les fréquences ainsi obtenues dans les marges du tableau sont appelées **fréquences marginales**.

	Test positif	Test négatif	Total
Malades	0,147	0,003	0,150
Pas malades	0,009	0,841	0,850
Total	0,156	0,845	1,000

Exemple : Interpréter la valeur de la case grisée.

14,7 % des personnes testées sont malades et ont un test positif

→ **Tableau des fréquences conditionnelles en lignes**

On divise l'effectif de chaque case par l'effectif total de la ligne correspondante. On parle de **fréquence conditionnelle** car l'ensemble de référence pour le calcul des fréquences n'est plus celui de la population totale : ce sera successivement l'ensemble des malades puis celui des non malades.

	Test positif	Test négatif	Total
Malades	0,98	0,02	1,00
Pas malades	0,01	0,99	1,00

Exemple : Interpréter la valeur de la case grisée.

2 % des personnes malades on un test negatif

→ **Tableau des fréquences conditionnelles en colonnes**

On divise l'effectif de chaque case par l'effectif total de la colonne correspondante. L'ensemble de référence pour le calcul des fréquences sera successivement l'ensemble des tests positifs puis celui des tests négatifs.

	Test positif	Test négatif
Malades	0,945	0,004
Pas malades	0,055	0,996
Total	1,000	1,000

Exemple : Interpréter la valeur de la case grisée.

0,4 % des personnes avec un test négatif sont malades

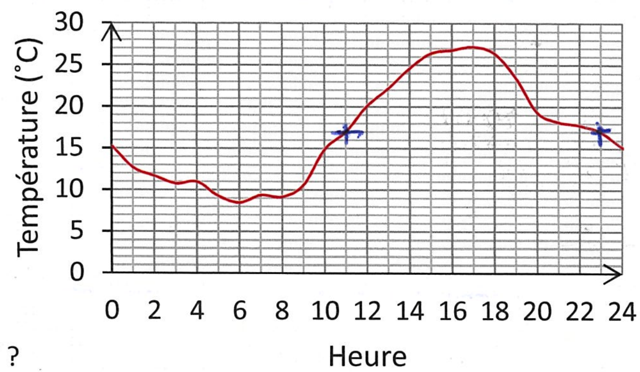
Fonction 1 : Modeliser des évolutions continues

Exercice des températures

Un site de météo fournit une courbe des températures à Dijon pour la journée du 9 octobre 2023.

On considère la fonction qui associe à l'heure de la journée la température mesurée en degré Celsius.

On note cette fonction $f : H \mapsto T$ où H est l'heure et T la température.



1. Quelle a été la température la plus élevée et à quelle heure a-t-elle été atteinte ? Que cela signifie-t-il pour la fonction f ?
2. Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse 4 de la courbe ? Que cela signifie-t-il pour la fonction f ?
3. Quelles sont les abscisses des points d'ordonnée 17 de la courbe ? Que cela signifie-t-il pour la fonction f ?
4. Dressez le tableau de variations de la fonction f.
5. À quelle heure de la journée la température ~~descend~~ monte-elle la plus vite ?
6. Quelle est la plus grande valeur possible de $f(H+1) - f(H)$ lorsque H est compris entre 0 et 23 ?

1) La temperature la plus élevée est 27 °C a 17 h
On dit que le maximum de f est 27, il est atteint en 17.

2) L'ordonnée du point d'absisse 4 est 11. Autrement dit, à 4h la temperatures était 11 °C. Pour la fonction, on dit que l'image de 4 par f est 11.

3) Les absisses des points d'ordonnée 17 sont 11 et 23
Autrement dit la temperature était de 17 °C a 11h et 23h
On dit que les antécedents de 17 par f sont 11 et 23.

4)

H	0		6		17		24
$f(H)$	15	↘	8	↗	27	↘	15

On dit que f est croissante sur l'intervalle $[6 ; 17]$ et décroissante sur les intervalles $[0 ; 6]$ et $[17 ; 24]$

5) La température augmente le plus vite vers 9h30

6) Pour $H = 9$, l'écart $f(H+1) - f(H)$ est le + élevé

Résolution graphique d'équations et inéquations

Équation ou inéquation	$f(H) = 12$	$f(H) = 5$	$f(H) \geq 17$	$f(H) \leq 10$
Solutions	1,5 et 9,5	Pas de solution	Tous les nombres compris entre 11 et 23 (inclus)	Tous le nombre entre 4,5 et 9
Ensemble des solutions, noté S	$S = \{1,5 ; 9,5\}$	$S = \emptyset$	$S = [11 ; 23]$	$S = [4,5 ; 9]$

Rappels sur les ensembles finis (exemples)

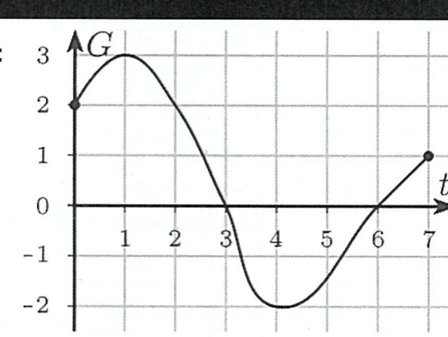
L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé <u>ensemble vide</u> : on le note $\emptyset$.

L'ensemble dont le seul élément est 1 est noté $\{1\}$.

L'ensemble dont les éléments sont 2 et 4 et 6 est noté $\{2 ; 4\}$ ou bien $\{4 ; 2\}$. Etc.

Exercice de la fonction définie par une courbe

G est une grandeur qui dépend du temps t. Voici ci-contre la courbe de la fonction f :



Compléter les phrases suivantes, ainsi que les tableaux.

L'image de 3 par f est 0. Le nombre 7 est un antécédent de 1 par f.

Le minimum de f est −2. Ce minimum est atteint en 4.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(t) = 0$ est 3 et 6

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \leq 1$ est S = [2,6 et 7]

t	0		1		4		7
Variations de $f(t)$	2	↗	3	↘	−2	↗	1

t	0		3		6		7
Signe de $f(t)$		+	0	−	0	+	

Exercice du jeu en ligne

Un site de jeux vidéo sur internet constate que la durée de chargement des jeux vidéo dépend du nombre de joueurs connectés en même temps. Le tableau ci-dessous représente les valeurs recueillies par le site :

Nombre de joueurs	50	105	240	400	510	605
Durée de chargement (centième de seconde)	31	38	65	124	192	281

Quel est le temps d'attente lorsque 300 joueurs sont connectés ? Lorsque 700 joueurs sont connectés ?

On considère la fonction

$$f : x \longrightarrow T$$

avec x : nombre de joueurs
T : temps d'attente (centième de second

Exercice du croisement

Au volant de sa voiture, **D**amien quitte **D**ijon en direction de Mâcon en empruntant l'autoroute.

Au même moment, **M**erouane quitte **M**âcon en direction de Dijon à l'autre bout de cette même autoroute.

La distance entre le sud de Dijon et le nord de Mâcon par cette autoroute est de 107 km.

Le trajet est dessiné ci-contre.

Damien roule à la vitesse constante de 90 km/h.
Merouane roule à la vitesse constante de 120 km/h.

Quand et où les deux automobilistes vont-ils se croiser ?

~~temps en min~~	Damien	Merouane
0	0	107
10 min	15	87
30 min	45	47
40 min	60	27

on a tracé dans un graphique la distance Damien - Dijon et la distance Merowan - Dijon. On obtient deux droites qui se croisent a environ 30 minutes et une distance de 45 km environ on considère la fonctions:

- $f : t \rightarrow$ distance Damien - Dijon
- $g : t \rightarrow$ distance Marouane - Dijon

on donne leurs expression :

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= 1,5 \times t \\ g(t) &= 107 - 2 \times t \end{aligned}}$$

A la calculatrice graphique, on trace les courbes de f et g et on détermine leurs intersection

$$\boxed{\begin{aligned} &f(t) = g(t) \simeq 45,857 \\ &\text{pour } t \simeq 30,57 \end{aligned}}$$

Donc ils se croisent à 45 km et 857 m de dijon après 30 min et 34 second environ

Essayons de faire encore mieux et d'obtenir de valeurs exactes !

On peut resoudre l'equation

$$f(t) = g(t) \quad +2t$$

$$1,5(t) = 107 - 2(t) \quad \div 3,5$$

$$t = \frac{107}{3,5}$$

$$\boxed{t = \frac{214}{7}}$$

Exercice de la distance de sécurité

La prévention routière prévoit une campagne d'information à la suite de l'augmentation du nombre de décès sur les routes. Le but est de rappeler l'importance des distances de sécurité. La distance de sécurité dépend de la vitesse à laquelle on conduit. On l'exprime à l'aide de la fonction $f(v) = 0{,}003v^3 + 0{,}2v + 8$ où v est en km/h et $f(v)$ en mètres.

1. Calculer $f(50)$ et **interpréter** ce résultat.

2. Quelle est la distance de sécurité si la vitesse du véhicule est de 110 km/h ?

3. À l'aide d'une calculatrice graphique, tracer la courbe de cette fonction sur $[0\,;130]$.

4. À l'aide d'une calculatrice graphique, déterminer la vitesse à ne pas dépasser si on suit une voiture à 70 mètres.

5. Sachant que sur l'autoroute un trait correspond à 38 m et qu'entre deux traits la distance est de 14 m, la phrase de sensibilisation « 1 trait danger, 2 traits sécurité » est-elle pertinente pour une voiture roulant à 130 km/h ?

f : vitesse $\longmapsto$ distance de sécurité

1) $f(50) = 0{,}0003 \times 50^3 + 0{,}2 \times 50 + 8$
$= 37{,}5 + 10 + 8$
$= 55{,}5$

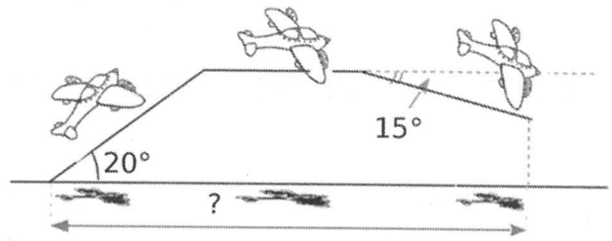
Lorsque la vitesse est 50 km/h la distance de sécurité est de 55,5 m

2) On calcule l'image de 110 par f :

$f(110) = 0{,}0003 \times 110^3 + 0{,}2 \times 110 + 8$
$= 399{,}3 + 22 + 8$
$= 429{,}3$

Exercice de l'avion

Un avion décolle et prend de l'altitude pendant 1,5 minute, il poursuit son trajet à cette altitude pendant 10 minutes et redescend pendant 2 minutes (voir schéma). La vitesse de l'avion reste constante à 480 km/h.



En supposant que le Soleil soit au zénith et que ses rayons soient perpendiculaires au sol, calcule la distance parcourue par son ombre sur le sol.

→ on commence par nommer les points :

→ on calcule la distance AD :

$$AD = 1{,}5 \times \frac{480}{60}$$
$$= 12 \text{ km}$$

→ on utilise la trigonometrie dans le triangle ABD

$$\cos(20°) = \frac{AB}{12}$$

$$AB = 12 \times \cos(20°)$$
$$\approx 11{,}3 \text{ km}$$

- $DE = EF = 10 \times \frac{480}{60} = 80 \text{ km}$
- $EG = 2 \times \frac{480}{60} = 16 \text{ km}$

→ On utilise la trigonométrie

$$\cos(G) = \frac{KG}{EG}$$

$$\cos(15) = \frac{KG}{16}$$

$$KG = 16 \times \cos(15)$$
$$\approx 15{,}5$$

Conclusion :

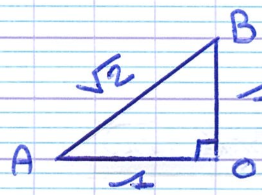
L'ombre a parcouru $11{,}3 + 80 + 15{,}5$
$= 106{,}8$ km

Trigonometrie 1 : Cercle trigonometrique

→ Dans l'exercice de l'avion, on a utilisé la trigonométrie dans des triangles rectangles, comme appris au collège. Cette année, nous allons faire sortir la trigo du triangle !

Etape 1 : Valeurs particulières de cos et sin

* cos et sin de 45°



On considère OAB isocèle rectangle en O avec AO = = BO = 1

Avec le théorème de pythagore on a ~~AB² =~~

$$AB^2 = AO^2 + BO^2$$
$$= 1^2 + 1^2$$
$$= 2$$

Donc $AB = \sqrt{2}$

De plus on a $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$
et la somme des angles fait 180° donc nécessairement
$OAB = 45°$

Finalement

$$\cos\left(\widehat{OAB}\right) = \frac{AO}{AB}$$

$$\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

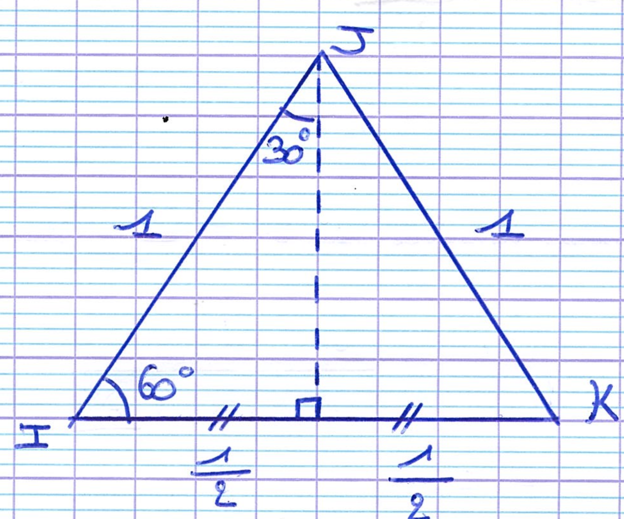
$$\sin \widehat{OAB} = \frac{OB}{AB}$$

$$\sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

remarque $\frac{1}{\sqrt{2}}$

A retenir

$$\boxed{\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$



Dans le triangles isocèle IJK. la hauteur issue de J coupe [IK] en son milieu L. En raisonnant sur les angles on determine.

$\widehat{LIJ} = 60^\circ$

$\widehat{IJL} = 30^\circ$

Par Pythagore

$$LJ^2 = IJ^2 - IL^2$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= 1 - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{4}$$

$$LJ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

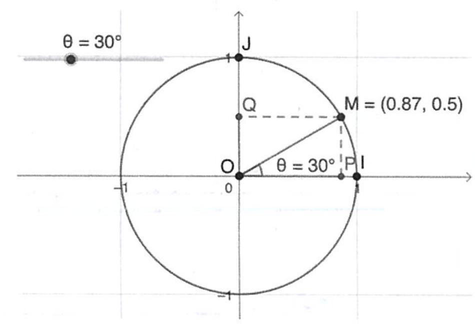
$$\cos(LIJ) = \frac{IL}{IJ}$$

$$\sin(LIJ) = \frac{JL}{IJ}$$

donc $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$

$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice du cercle trigonométrique (GeoGebra)



Dans un repère orthonormé, on appelle cercle trigonométrique le cercle de centre $O(0\,;0)$ et de rayon 1.
M est un point quelconque sur le cercle trigonométrique.
Sur le fichier GeoGebra, à l'aide du curseur, en faisant varier l'angle $\widehat{AOM}$ noté θ, le point M se déplace sur le cercle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (appelé sens « direct » par les mathématiciens).

1. Faire varier le curseur entre 0° entre 90° avec un pas de 15°. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les coordonnées à 10^{-2}.

Angle $\widehat{OAM}$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
x_M (abscise de M)	1	0,97	0,87	0,71	0,5	0,26	0
y_M (ordonnée de M)	0	0,26	0,5	0,71	0,87	0,97	1

2. En se raisonnant dans le triangle OPM rectangle en P, justifier que lorsque l'angle est compris entre 0° et 90°, alors $x_M = cos(\widehat{AOM})$ et $y_M = sin(\widehat{AOM})$. On rappelle que $OM = 1$.

$\cos(\theta) = \frac{adj}{hyp} = \frac{OP}{OM} = \frac{x_M}{1}$ donc $\cos(\theta) = x_M$

$\sin(\theta) = \frac{opp}{hyp} = \frac{MP}{OM} = \frac{y_M}{1}$ donc $\sin(\theta) = y_M$

3. Au collège, l'étude du sinus et du cosinus s'est limitée aux angles compris entre 0 et 90° (dans un triangle rectangle). En posant $\cos(\theta) = x_M$ et $\sin(\theta) = y_M$, on peut définir le cosinus et le sinus pour des angles supérieurs à 90°.

a. Modifier les paramètres du curseur pour pouvoir continuer le parcours du point M sur le cercle en faisant varier l'angle 0 entre 90° et 180° avec un pas de 15°. Réaliser un tableau comme précédemment de 90° à 180° avec un pas de 15°.

Angle θ	90°	105	120	135	150	165	180°
$\cos(\theta)$	0	-0,26	-0,5	-0,71	-0,87	-0,97	-1
$\sin(\theta)$	1	0,97	0,87	0,71	0,5	0,26	0

b. Comparer ce tableau à celui de la question 1. Quelles remarques peut-on faire ?

4. À l'aide des tableaux précédents, réaliser un nouveau tableau allant de 180° à 270° avec un pas de 15°. Vérifier ensuite les résultats sur GeoGebra.

Angle θ	180	195	210	225	240	255	270
$\cos(\theta)$	-1	-0,97	-0,87	-0,71	-0,5	-0,26	0
$\sin(\theta)$	0	-0,26	-0,5	-0,71	-0,87	-0,97	1

5. Réaliser de même un tableau allant de 270° à 360° avec un pas de 15°.

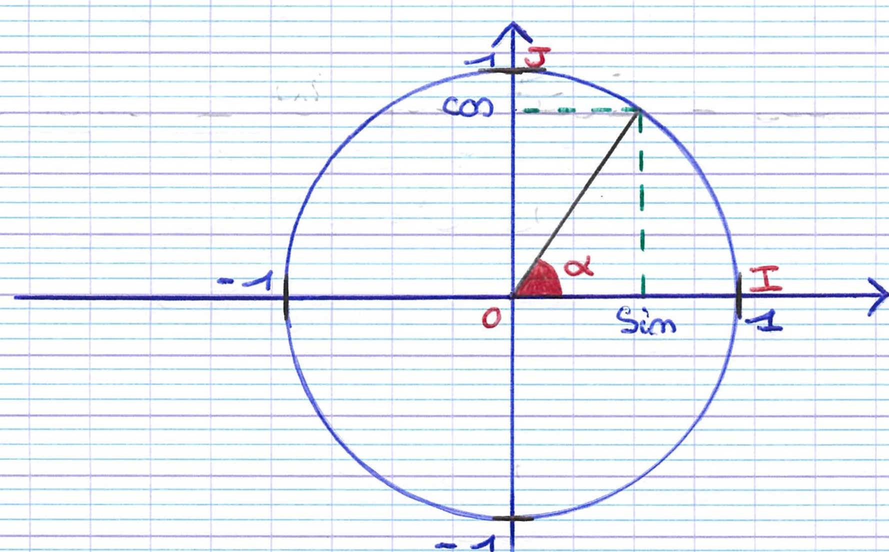
Angle θ	270	285	300	315	330	345	360
$\cos(\theta)$	0	0,26	0,5	0,71	0,87	0,97	1
$\sin(\theta)$	-1	-0,97	-0,87	-0,71	-0,5	-0,26	0

*** étape 2 : cos et sinus d'angles entre 0° et 360°**

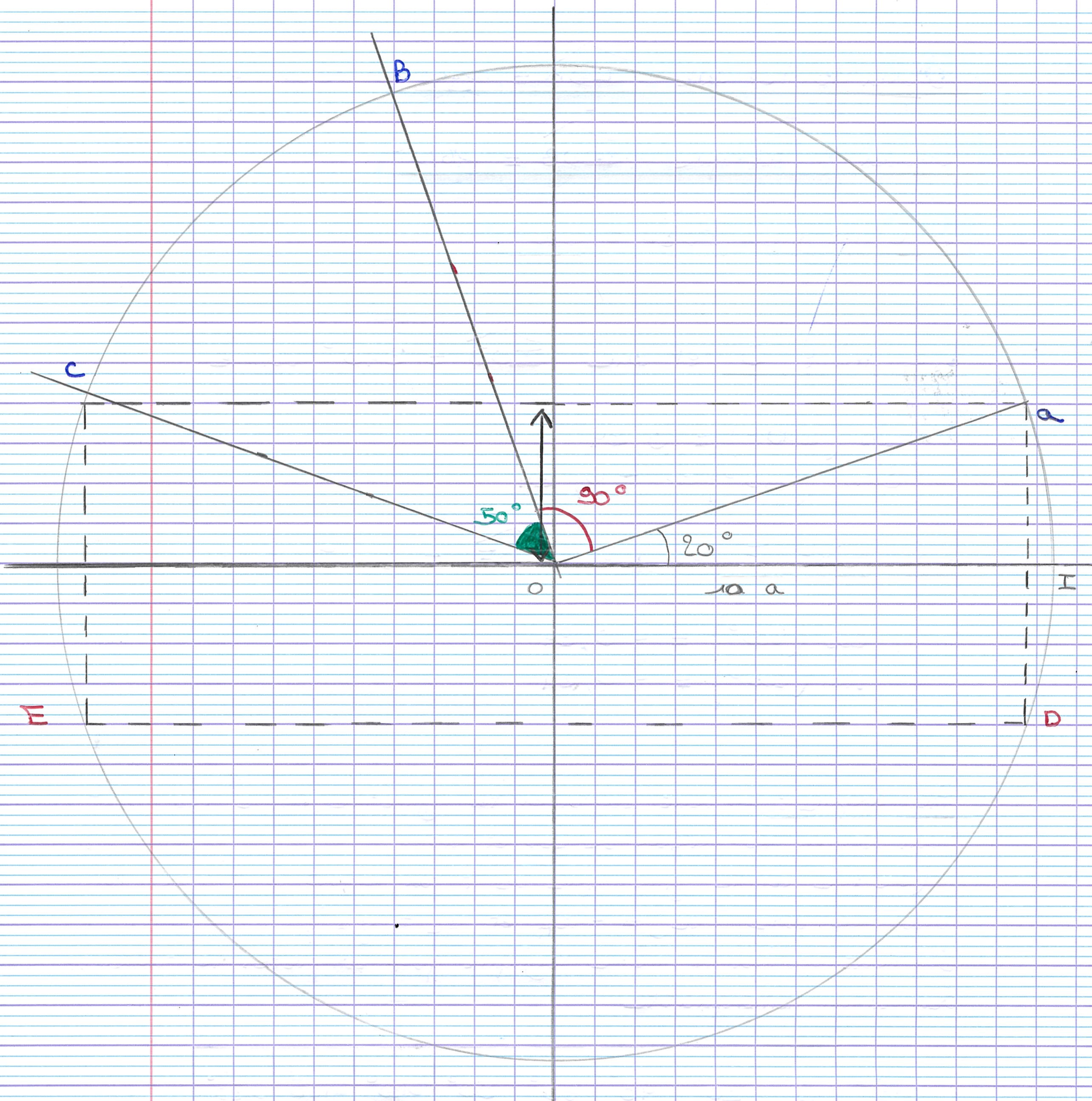
-> Voir l'exercice du cercle trigonométrique (GéoGebra)

A RETENIR

Le cercle trigonometrique est le cercle de centre O (l'origine du repère) et de rayon 1.
Si M est un point de ce cercle, cés coordonnées donnent le cosinus de l'angle $\widehat{OIM}$ (qu'on note α dans la suite)



abscisse de M	x_M	$\cos(\alpha)$
ordonnée de M	y_M	$\sin(\alpha)$



Dans le repère ci dessus (echelle 10 cm de rayon)

• on a placée tel que $\widehat{IOA} = 20°$. Les coordonnées de A sont environ $(0,94 ; 0,34)$ donc $\cos(20°) = 0,94$

$\sin(20°) = 0,34$

Placer B tel que $\widehat{IOB} = 110°$

Placer C tel que $\widehat{IOB} = 160°$

et D tel que $\widehat{IOD} = 340°$

- le point D tel que $\widehat{IOD} = 340°$ donne

$\cos(340°) = 0,94$
$\sin(340°) = -0,34$

- le point E tel que $\widehat{IOE} = 200°$ donne

$\cos(200°) = -0,94$
$\sin(200°) = -0,34$

Remarque : on peut exploiter les symétrie entre ces point pour deviner les valeur de cos et sin.
(ex : C est le symetrique de A par rapport a l'axe des ordonnée donc $x_C = -x_A$ et $y_C = y_A$)
On peut utiliser la même logique pour completer le tableau des valeur remarquable

angle	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Chouette mais pas pratique avec les degrés ... heureusement les radians vont nous sauver la mise mais on en parle dans 2 semaines

Exercice du fournisseur d'électricité

L'entreprise GreenWatt fournit de l'électricité décarbonée pour les particuliers (maisons ou appartements) et les entreprises (bureaux, commerces, etc). Les clients doivent choisir parmi trois tarifs :

- **Tarif A** : 20 centimes par kWh consommé
- **Tarif B** : 17 centimes par kWh consommé, auxquels s'ajoute un forfait mensuel fixe de 20 €
- **Tarif C** : 12,5 centimes par kWh consommé, auxquels s'ajoute un forfait mensuel fixe de 130 €

1. Pour un logement de 75 m², la consommation mensuelle moyenne est estimée entre 800 et 1200 kWh. Quel est le tarif le plus avantageux pour un tel logement ?
2. Pour quelle consommation le tarif A est-il le plus avantageux ?
3. Déterminer le tarif le plus avantageux en fonction de la quantité d'électricité consommée.

1) Pour 800 kWh :

Tarifs A : $0,20 \times 800 = 160$ €

Tarif B : $0,17 \times 800 + 20 = 156$ €

Tarif C : $0,125 \times 800 + 130 = 230$ €

Pour 1200 kwh

Tarif A : 240 €
B : 224 €
C : 280 €

Le tarif B est le plus avantageux

Pour les question 2 et 3 on considère les fonctions a, b et c modelisant les tarifs A, B et C en fonction de x la conso en kwh

$$a(x) = 0,2x$$
$$b(x) = 0,17x + 20$$
$$c(x) = 0,125x + 130$$