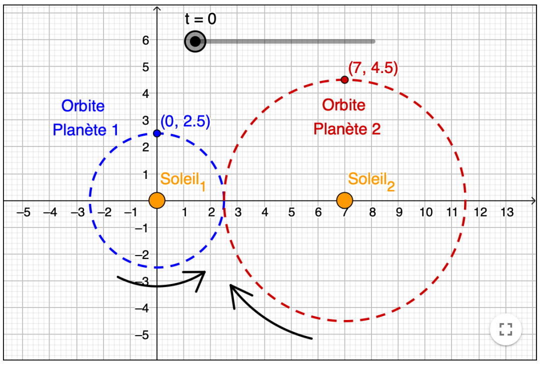
Exercice de la fin du monde



Dans une galaxie très lointaine se trouvent deux soleils et deux planètes. Chaque planète suit une orbite circulaire uniforme autour de « son » soleil.

Les habitants de la planète 1 voudraient savoir si les deux planètes vont entrer en collision un jour ou l'autre. Ils disposent des relevés des positions des planètes depuis les 10 derniers milliards de secondes.

Vous pouvez obtenir ces positions en faisant varier le curseur t entre 0 et 10 (l'unité de temps est le milliard de secondes) sur la page **edurl.fr/fin-du-monde** ou en suivant le QR-code.

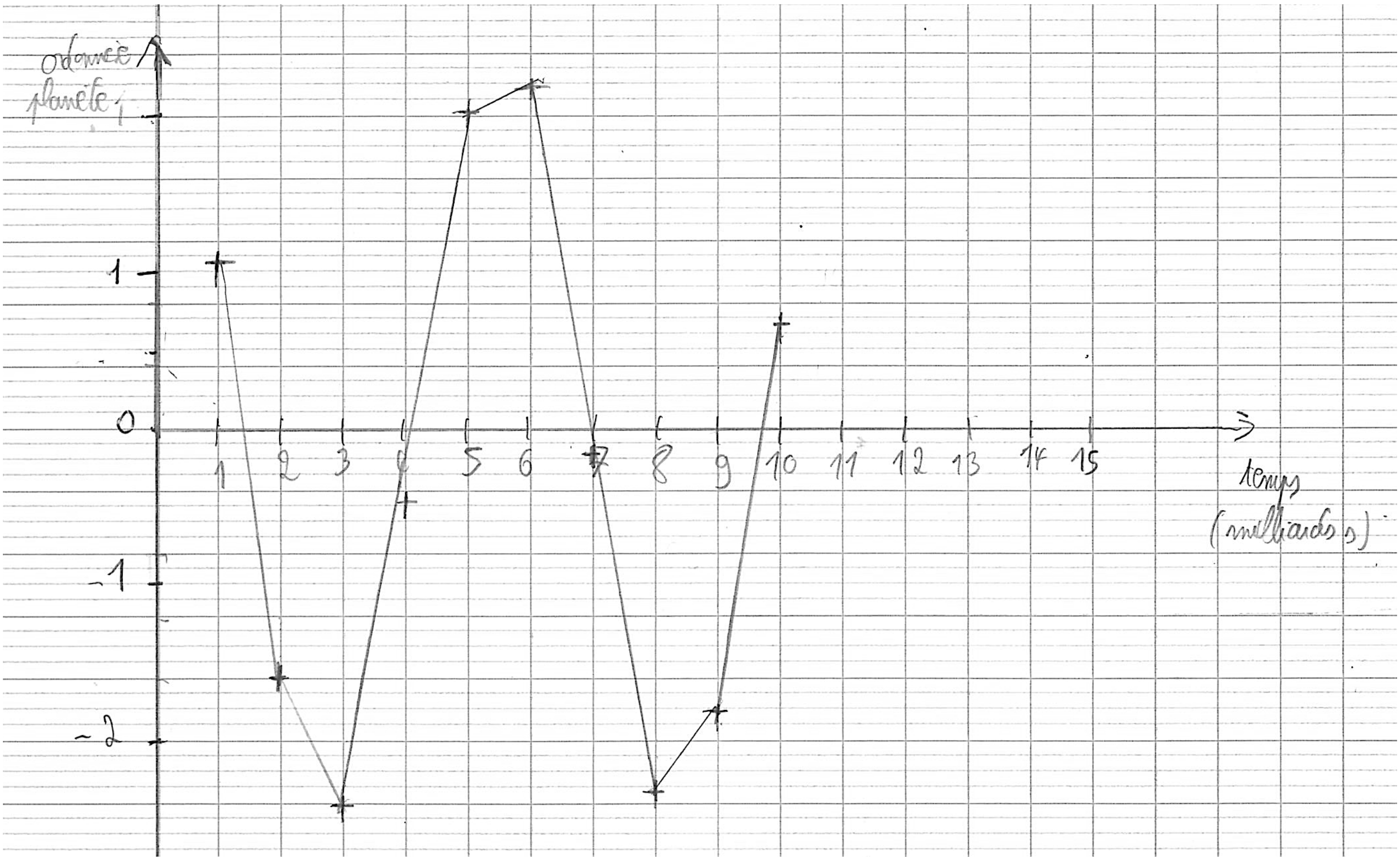
On note y_1 et y_2 les ordonnées des planètes 1 et 2.

Une physicienne de la planète 1 a résolu le problème en étudiant l'évolution de y_1 et y_2 en fonction du temps.

Elle a commencé par faire un tableau de quelques valeurs de y_1 en fonction de t, puis elle a représenté sur un graphique l'évolution de y_1 en fonction du temps, pour t allant de 0 à 15.

Faites un tableau de valeurs et une courbe qu'elle aurait pu obtenir.

temps	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1 planète 1	2,5	1,06	-1,59	-2,42	0,47	2,02	2,19	-0,16	-2,32	-1,82	0,71



Exercice de la fin du monde (suite)

Une mathématicienne prend connaissance de l'idée de la physicienne et la traduit en langage mathématique.

Comme les ordonnées y_1 et y_2 dépendent du temps t, il existe deux fonctions f_1 et f_2 telles que :

$$y_1 = f_1(t) \quad \text{et} \quad y_2 = f_2(t)$$

Ces deux fonctions se notent aussi :

$$f_1 : t \mapsto y_1 \quad \text{et} \quad f_2 : t \mapsto y_2$$

1. Quelle est l'image de 0 par la fonction f_1 ?

2. Quelle est l'image de $6{,}3$ par la fonction f_1 ?

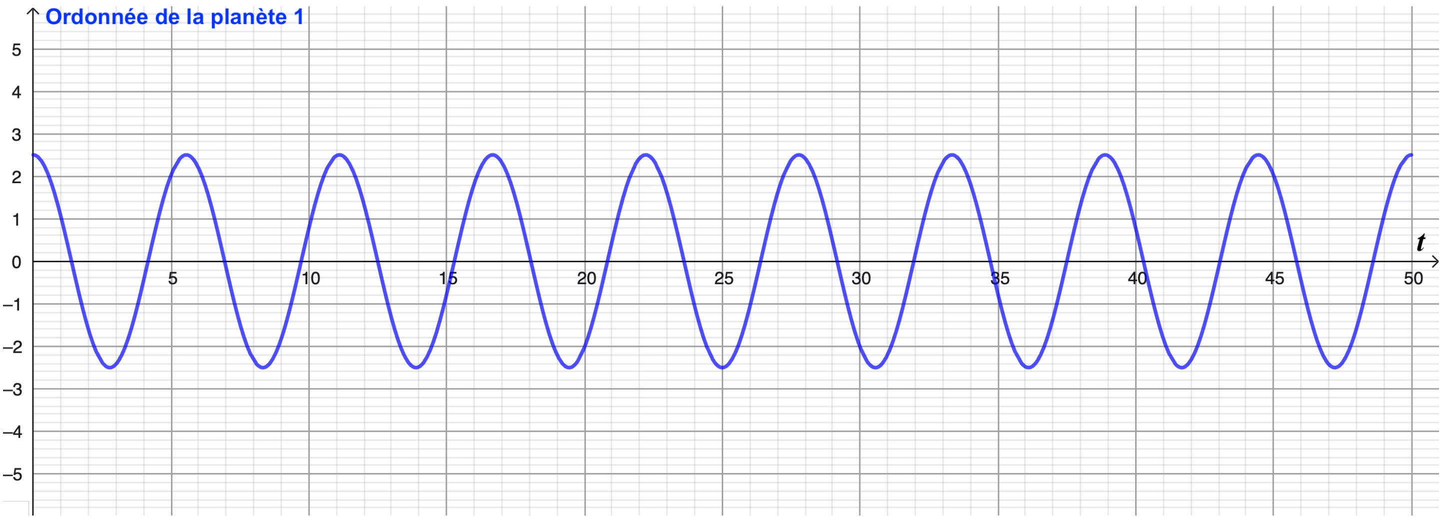
3. Quelle est l'image de $3{,}15$ par la fonction f_1 ?

4. Quelle est la valeur de $f_2(0)$?

5. *(Question pour les plus rapides)* On considère la fonction $g_1 : t \mapsto x_1$ où x_1 est l'abscisse de la planète 1.
On sait que la planète 1 retourne à la même position tous les 5,6 milliards de secondes.
Traduisez cette information à l'aide des fonctions f_1 et g_1.

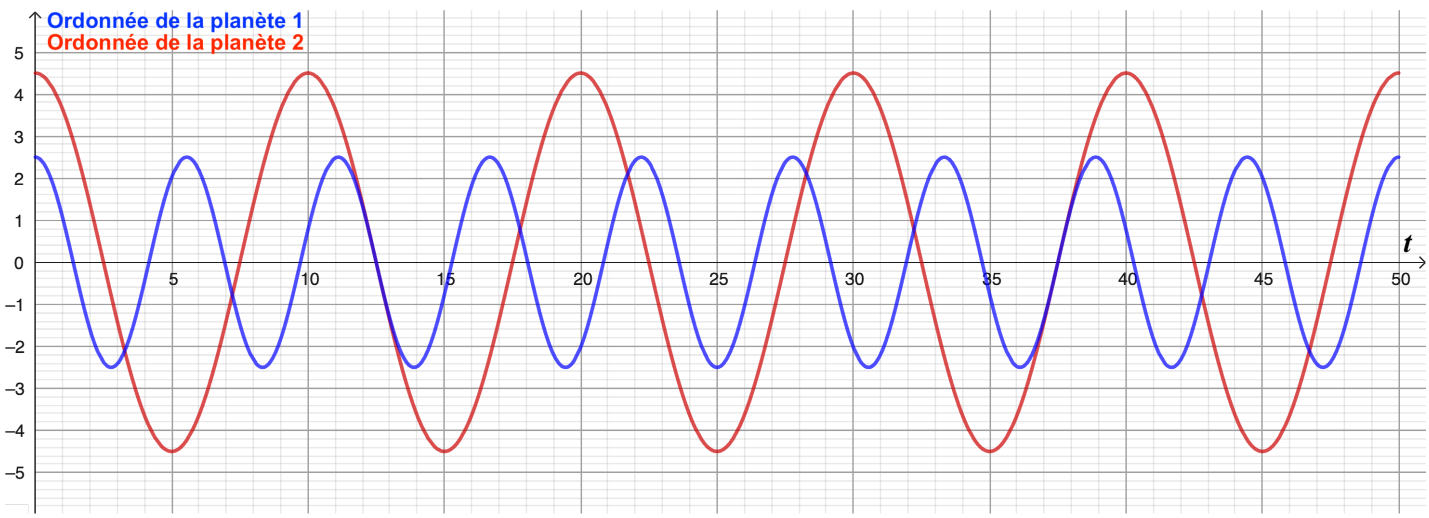
Exercice de la fin du monde (suite)

Voici la courbe de la fonction f_1 entre $t = 0$ et $t = 50$, tracée à l'aide de GeoGebra.
Allez sur **<u>edurl.fr/fin-du-monde</u>** ou scannez le QR-code.
Tracez soigneusement, sur ce même graphique, la courbe de la fonction f_2 sur l'intervalle de temps $[0 ; 50]$.



Exercice de la fin du monde (suite et fin)

Voici la courbe des fonction f_1 et f_2 entre $t = 0$ et $t = 50$, tracées à l'aide de GeoGebra.
À quel instant les planètes vont-elles entrer en collision ? *On rappelle que t est donné en milliards de secondes.*



Intervalles de nombres (exemple)

L'intervalle $[0\,;2{,}8]$ est l'ensemble des nombres compris entre 0 (inclus) et $2{,}8$ (inclus).

Par exemple, 1 est compris entre 0 et $2{,}8$. C'est donc un élément de l'intervalle $[0\,;2{,}8]$, on écrit :

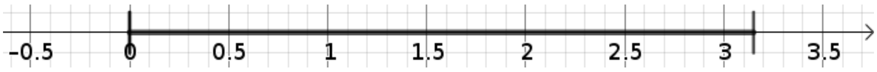
$$1 \in [0\,;2{,}8] \qquad \textit{(1 appartient à } [0\,;2{,}8]\textit{)}$$

En revanche, $5{,}6$ n'est pas compris entre 0 et $2{,}8$. Ce n'est donc pas un élément de cet intervalle, on écrit :

$$5{,}6 \notin [0\,;2{,}8] \qquad \textit{(5,6 n'appartient pas à } [0\,;2{,}8]\textit{)}$$

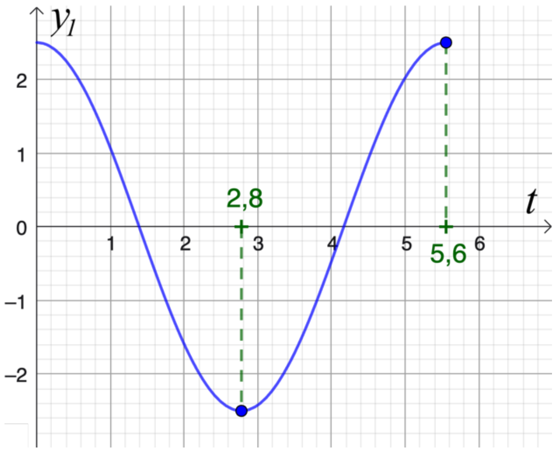
Les éléments de l'ensemble $[0\,;2{,}8]$ sont les nombres x tels que $0 \leq x \leq 2{,}8$ où « $\leq$ » signifie *inférieur ou égal*.

On peut représenter l'intervalle $[0\,;2{,}8]$ par le segment ci-dessous :



Variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0\,;\ 5{,}6]$

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de f_1 sur l'intervalle $[0\,;\ 5{,}6]$:



La plus grande valeur de y_1 est $2{,}5$. On dit que $2{,}5$ est le maximum de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0\,;\ 5{,}6]$.

Ce maximum est atteint en $t = 0$ et $t = 5{,}6$.

La plus petite valeur de y_1 est $-2{,}5$. On dit que $-2{,}5$ est le minimum de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0\,;\ 5{,}6]$.

Ce minimum est atteint en $t = 2{,}8$.

Lorsque t augmente de 0 à $2{,}8$, l'ordonnée y_1 diminue.

On dit que la fonction f_1 est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\ 2{,}8]$.

Lorsque t augmente de $2{,}8$ à $5{,}6$, l'ordonnée y_1 augmente.

On dit que la fonction f_1 est croissante sur l'intervalle $[2{,}8\,;\ 5{,}6]$.

On résume les variations de la fonction f_1 dans un tableau de variations.

t	0	2,8	5,6
Variations de $f_1(t)$	2,5 ↘	-2,5	↗ 2,5

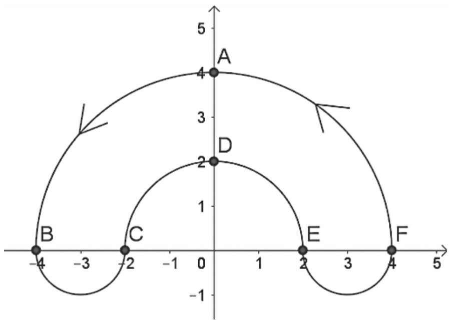
Définitions

Une fonction f est croissante sur un intervalle lorsque $f(x)$ augmente quand x augmente en restant dans l'intervalle.

Une fonction f est décroissante sur un intervalle lorsque $f(x)$ diminue quand x diminue en restant dans l'intervalle.

Lorsque f est croissante sur l'intervalle ou décroissante sur l'intervalle, on dit qu'elle est monotone sur l'intervalle.

Exercice du cycliste



Un cycliste roule à vitesse constante sur le circuit représenté ci-après et effectue deux tours de circuit.

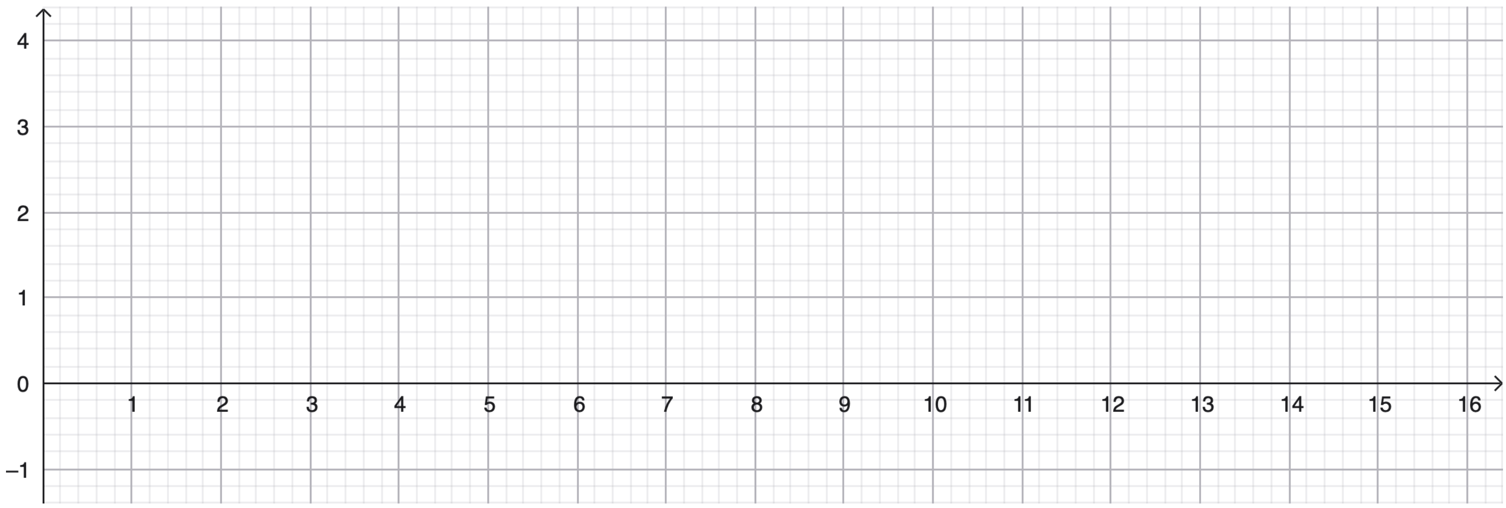
Au départ, il est au point A puis parcourt le circuit dans le sens ABCDEFA. Il met 8 minutes pour effectuer un tour, donc 16 minutes pour deux tours.

1. Compléter le tableau des variations de la fonction $f : t \to y$ où t est le temps écoulé depuis le départ en minutes et y l'ordonnée du cycliste.

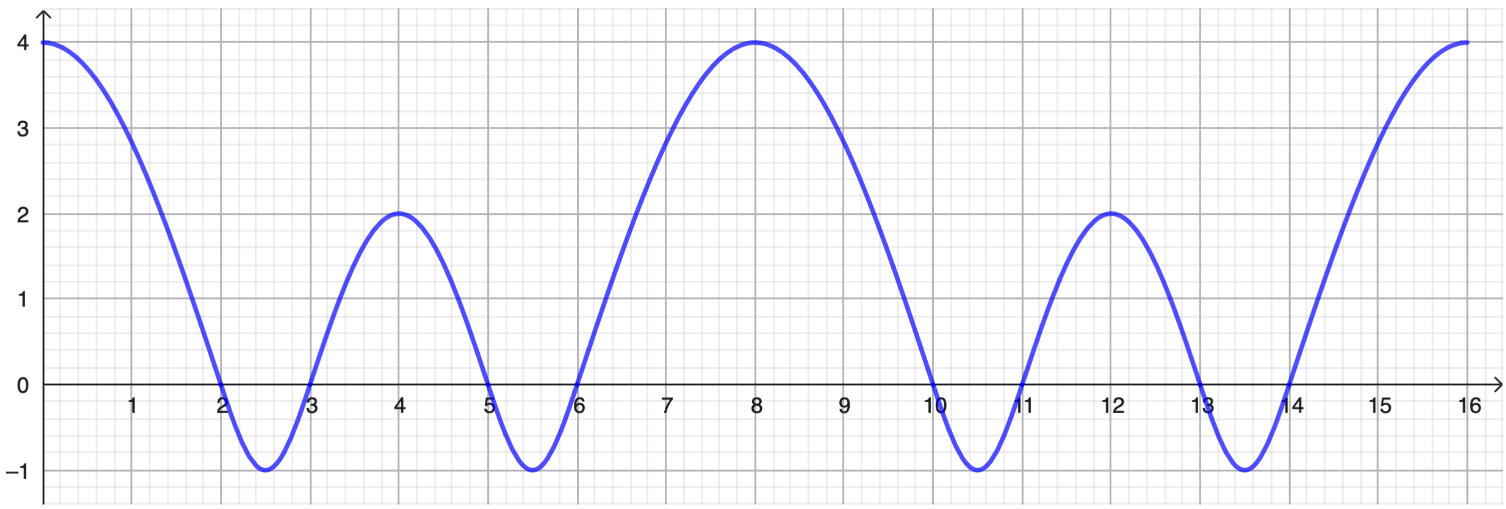
t	
Variations de $f(t)$ *(c'est-à-dire de l'ordonnée y)*	

2. Sur la grille distribuée avec l'énoncé, tracez la courbe représentative de la fonction f.

Courbe de l'ordonnée du cycliste en fonction du temps (en minutes)



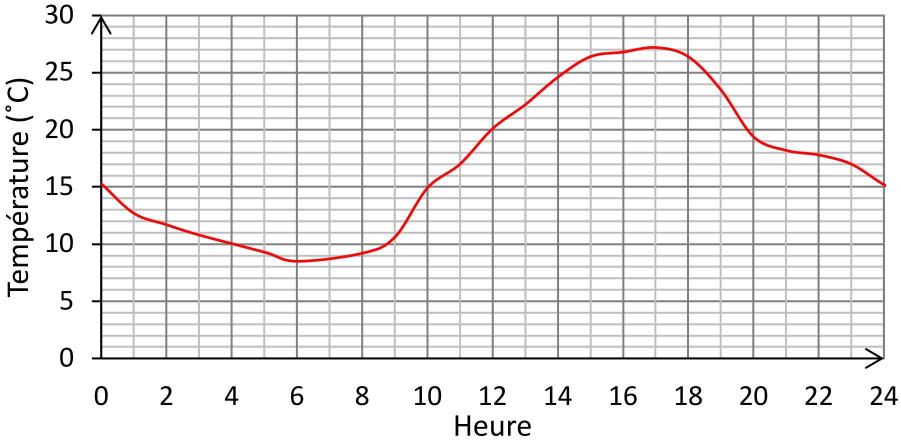
Courbe de l'ordonnée du cycliste en fonction du temps (en minutes)



Exercice de la température

Un site de météo fournit une courbe des températures à Dijon pour la journée du 9 octobre 2023.

Soit la fonction $f : H \mapsto T$ où H est l'heure et T la température en degré Celsius.



1. Quelle a été la température la plus élevée et à quelle heure a-t-elle été atteinte ?
Comment traduire cette information pour la fonction f ?

2. Quelle est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4 ? Comment traduire cela pour la fonction f ?

3. Quelles sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 17 ? Comment traduire cela pour la fonction f ?

4. Construire le tableau des variations de la fonction f.

5. *(Pour les rapides)* À quelle heure de la journée la température descend-elle la plus vite ?

6. *(Pour les rapides)* Quelle est la plus grande valeur possible de $f(H+1) - f(H)$ lorsque H est compris entre 0 et 23 ?

Complément : Résolution graphique d'équations et inéquations

Équation ou inéquation	$\boldsymbol{f(H) = 12}$	$\boldsymbol{f(H) = 5}$	$\boldsymbol{f(H) \geq 17}$	$\boldsymbol{f(H) \leq 10}$
Solutions	1,6 et 9,3	Pas de solution	L'ensemble des nombres compris entre 11 et 23, 11 et 23 inclus.	L'ensemble des nombres compris entre 4,6 et 8,7, 5,5 et 8,8 inclus.
Ensemble des solutions, noté *S*	$\mathcal{S} = \{10{,}4\ ;\ 20{,}8\}$	$\mathcal{S} = \emptyset$	$\mathcal{S} = [11\ ;\ 23]$	$\mathcal{S} = [4{,}6\ ;\ 8{,}7]$

Ensembles finis (exemples)

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ensemble vide : on le note ∅.
L'ensemble dont le seul élément est 1 est noté {1}.
L'ensemble dont les éléments sont 2 et 4 et 6 est noté {2 ; 4} ou bien {4 ; 2}. Etc.

Exercice de la grandeur dépendant du temps

G est une grandeur qui dépend du temps t. Voici ci-contre la courbe de la fonction $f : t \mapsto G$.

Compléter les phrases suivantes et le tableau de variations.

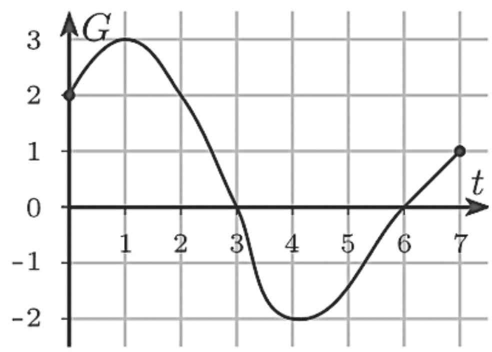
L'image de 3 par f est . . . . .

Le nombre . . . . . est un antécédent de 1 par f.

Le minimum de f est . . . . . Ce minimum est atteint en . . . . .

L'ensemble des solutions de l'équation $f(t) = 0$ est . . . .

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \leq 1$ est . . . .



t	
Variations de $f(t)$	