

Exercice corrigé

Soit PQR un triangle rectangle en P .

1. Quel est le projeté orthogonal de Q sur la droite (PR) ? Quel est le projeté orthogonal de R sur la droite (PQ) ?

On donne trois propriétés :

Propriété 1 Si un quadrilatère a quatre angles droits, alors ce quadrilatère est un rectangle.

Propriété 2 Si un quadrilatère est un rectangle, alors il a quatre angles droits.

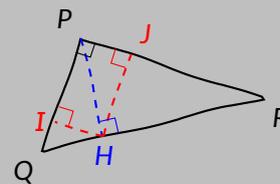
Propriété 3 Si trois angles d'un quadrilatère sont droits, alors le quatrième angle du quadrilatère est un angle droit.

2. Soit H le projeté orthogonal de P sur (QR) , soit I le projeté orthogonal de H sur (PQ) et soit J le projeté orthogonal de H sur (PR) . En utilisant certaines des trois propriétés, répondre à la question « $PIHJ$ est-il un rectangle ? ».

Une solution possible de l'exercice...

1. Le projeté orthogonal de Q sur (PR) est P . Le projeté orthogonal de R sur (PQ) est P .

2. Le triangle PQR est rectangle en P donc l'angle \widehat{IPQ} est droit. De plus, I est le projeté orthogonal de H sur (QP) donc l'angle \widehat{HIP} est un angle droit. Enfin, J est le projeté orthogonal de H sur (PR) donc l'angle \widehat{HJP} est un angle droit. Le quadrilatère $PIHJ$ possède donc trois angles droits. D'après la propriété 3, le quatrième angle est donc aussi un angle droit. D'après la propriété 1, $PIHJ$ est donc un rectangle.



Pour se lancer...

1 P est un point et (d) une droite ne passant pas par P . Q est le projeté orthogonal de P sur (d) et R est un point de (d) distinct de Q . Q' est le symétrique de Q par rapport au milieu du segment $[PR]$. Voilà cinq propriétés :

Propriété 1 Les diagonales d'un parallélogramme se croisent en leur milieu.

Propriété 2 Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Propriété 3 Si un parallélogramme a un angle droit, alors ce quadrilatère est un rectangle.

Propriété 4 Un rectangle a quatre angles droits.

Propriété 5 Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur.

En utilisant certaines de ces propriétés, répondre à la question « $PQRQ'$ est-il un rectangle ? ».

Parcours de réussite

2 Dans chaque cas, trace une figure codée à main levée puis démontre que le quadrilatère est un parallélogramme.

1. $JEUX$ est un quadrilatère de centre K tel que $KJ = KU$ et $KX = KE$.

2. $GARS$ est un quadrilatère tel que (GA) est parallèle à (SR) et (GS) est parallèle à (RA) .

3. $DOUX$ est un quadrilatère non croisé tel que $\widehat{ODX} = \widehat{OUX}$ et $\widehat{DOU} = \widehat{DXU}$.

4. $VERS$ est un quadrilatère non croisé tel que (VE) est parallèle à (SR) et $VE = SR$.

3 On considère un triangle BAS . Soit le point I symétrique du point A par rapport au point B et le point L symétrique du point S par rapport au point B . Démontrer que le quadrilatère $LISA$ est un parallélogramme.

4 1. Le quadrilatère $CHAT$ est un parallélogramme tel que $AT = TC$. Démontrer que c'est un losange.

2. Le quadrilatère $GRIS$ est un parallélogramme tel que $GI = RS$. Démontrer que c'est un rectangle.

3. Le quadrilatère $NUIT$ est un parallélogramme de centre S tel que $SN = SU$ et les droites (IN) et (UT) sont perpendiculaires. Démontrer que c'est un carré.

Parcours d'approfondissement

5 Les quadrilatères $BOUE$ et $BRUT$ sont deux parallélogrammes et le point S est le milieu du segment $[BU]$. Démontrer que le quadrilatère $TERO$ est un parallélogramme.

6 Soit C un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ et P un point quelconque du cercle.

1. Soit R le symétrique de P par rapport à O . Justifier que le quadrilatère $APBR$ est un rectangle.

2. En déduire que le triangle APB est nécessairement rectangle en P .

7 Soit $ABCD$ un parallélogramme. Les droites (AC) et (BD) se coupent en O . Soit E le milieu de $[DO]$ et F le milieu de $[BO]$. Démontrer que $AECF$ est un parallélogramme.

8 Soit un parallélogramme $FEUX$ tel que $FE = 5$ cm, $EU = 6$ cm et $\widehat{FEU} = 50^\circ$. Soit R le projeté orthogonal de F sur (UX) et G le projeté orthogonal de U sur (FE) . Quelle est la nature du quadrilatère $FRUG$? Démontrer.