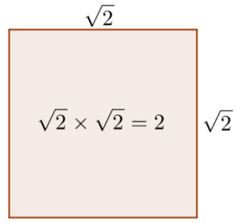
Le nombre $\sqrt{2}$

Considérons, en géométrie abstraite, un carré d'aire 2 cm². La longueur de son côté est <u>le nombre positif dont le carré vaut 2</u>, noté $\sqrt{2}$ (**racine carrée de 2**) :



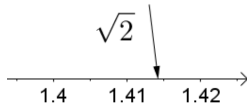
$$\boxed{\sqrt{2} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2.}$$

On a $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$ et $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$. Donc $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

En utilisant un algorithme de balayage, on a obtenu un meilleur encadrement :

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

Quand on saisit $\sqrt{2}$, la calculatrice affiche $1{,}414213562$ mais attention, ce n'est qu'une valeur approchée de $\sqrt{2}$.



RACINE CARREE D'UN NOMBRE POSITIF

Définition La racine carrée d'un nombre positif a, notée $\sqrt{a}$, est <u>le nombre positif dont le carré vaut a</u> :

$$\sqrt{a} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a.$$

<u>Exemple</u> : La racine carrée de 16 est 4 car 4 est un nombre positif et $4^2 = 4 \times 4 = 16$.

SOLUTIONS DE L'EQUATION $x^2 = a$ AVEC $a > 0$

Quels sont les nombres dont le carré vaut 9 ? . . . .

Quels sont les nombres dont le carré vaut 2 ? . . . .

Quels sont les nombres dont le carré vaut -16 ? . . . .

Quels sont les nombres dont le carré vaut 121 ? . . . .

Quels sont les nombres dont le carré vaut 10 ? . . . .

REGLE DE CALCUL AVEC LA RACINE CARREE

Propriété $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour tous a et b positifs ou nuls.

<u>Exemple</u> : $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

Attention ! En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Par exemple, $\sqrt{9+16} =$ . . . .

Alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} =$ . . . .

Exercice du point mystère

ABCD est un rectangle tel que *AB* = 4 cm et *BC* = 6 cm.

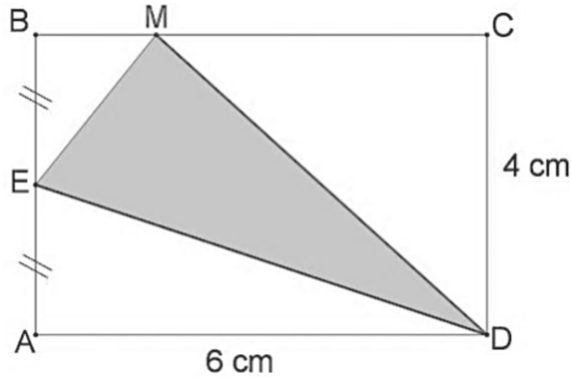
M est un point du segment [*BC*].

E est le milieu du segment [*AB*].

Est-il possible que le triangle *EDM* soit isocèle en *D* ?

Si oui, à quelle distance du point *C* le point *M* doit-il se trouver ?

Sinon, pourquoi ?



Dans le triangle EAD rectangle A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$ED^2 = AE^2 + AD^2$
$= 2^2 + 6^2$
$= 4 + 36$
$= 40$

Donc $\sqrt{40} = 6,32$ cm $ED \approx 6,3$ cm

Dans le triangle MDC rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore

Supposons que EMD est isocele alors $ED = MD \approx 6,3$.

$MD^2 = MC^2 + CD^2$
$6,3^2 = MC^2 + 4^2$
$MC^2 = 6,3^2 - 4^2$
$= 39,7 - 16 = 23,7$

Donc $\sqrt{23,7} = 5$ $MD = 4,9$

Attention, par ce raisonnement, on a seulement démontré que si $ED = MD$, alors $MD = \sqrt{24}$ cm. Autrement dit, on a démontré que pour que $ED = MD$, il . . . . que $MD = \sqrt{24}$.

Pour résoudre l'exercice, on doit aussi démontrer que si $MD = \sqrt{24}$, alors $ED = MD$. Autrement dit, on doit aussi démontrer que pour que $ED = MD$, il . . . . que $MD = \sqrt{24}$.