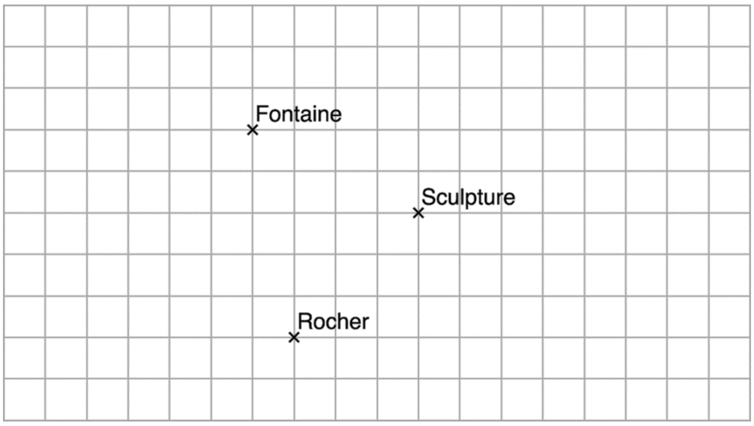
Exercice du trésor

Un commerçant avait accumulé un trésor. À sa mort, il laisse le message et la carte ci-dessous. Malheureusement, le vieux chêne dont il est question disparaît en même temps que le commerçant, et depuis, tous ceux qui ont le message entre les mains pensent que le trésor est introuvable.



Et vous, trouverez-vous le trésor ?

Partez du vieux chêne, allez vers la fontaine et parcourez en ligne droite une distance double de celle qui sépare le vieux chêne de la fontaine. Vous arrivez à un premier point.

Dirigez-vous alors vers la sculpture et parcourez en ligne droite une distance double de celle qui sépare le premier point de la sculpture. Vous arrivez à un second point.

Allez alors vers le rocher en forme de pyramide et parcourez en ligne droite une distance double de celle qui sépare le second point du rocher. Vous arrivez à un troisième point.

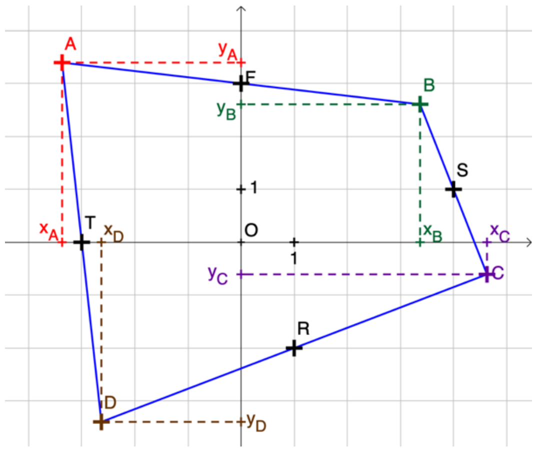
Le trésor est à mi-chemin entre le vieux chêne et le troisième point, à cinq pieds sous terre.

Notations

On note F, S et R les points représentant la fontaine, la sculpture et le rocher.
On appelle A le point où se trouve le vieux chêne. À partir de A, on définit :

- le point B, symétrique de A par rapport au point F ;
- le point C, symétrique de B par rapport au point S ;
- le point D, symétrique de C par rapport au point R ;
- le point T, milieu du segment $[AD]$.

DEMONSTRATION DE $x_T = -3$ ET $y_T = 0$



Nous allons exprimer en fonction de x_A et y_A les coordonnées des points B, C, D et T.

On a déjà, d'après la formule des coordonnées du symétrique d'un point par rapport à un autre :

$$\begin{aligned} x_B &= 2x_F - x_A \\ &= 2 \times 0 - x_A \\ &= -x_A \end{aligned}$$

Théorème sur les coordonnées du milieu

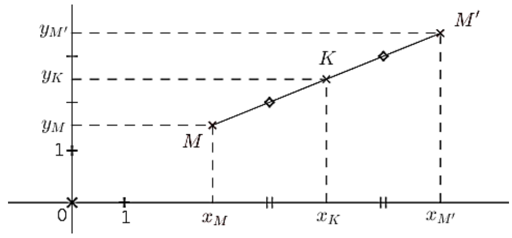
M et M' sont deux points quelconques, K est le milieu du segment $[MM']$.

Alors l'abscisse de K est la moyenne des abscisses de M et M' :

$$x_K = \frac{x_M + x_{M'}}{2}$$

Et l'ordonnée de K est la moyenne des ordonnées de M et M' :

$$y_K = \frac{y_M + y_{M'}}{2}$$



Coordonnées du symétrique d'un point par rapport à un autre

M' est le symétrique de M par rapport à K. On a :

$$x_{M'} = 2x_K - x_M \quad \text{et} \quad y_{M'} = 2y_K - y_M.$$

Exercice des deux symétriques

1. Sur la figure ci-contre, représentez les quatre points suivants.

$A(-1\ ;\ 2)$ et $B(2\ ;\ 3)$.

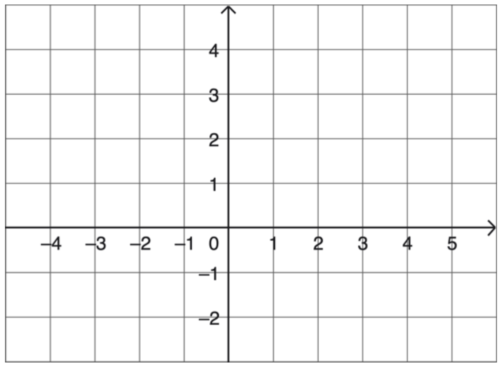
A', symétrique de A par rapport à B.

B', symétrique de B par rapport à A.

2. Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$?

3. Quelles sont les coordonnées de A' et de B' ?

4. Que peut-on dire du milieu de $[A'B']$?



Exercice de géométrie repérée

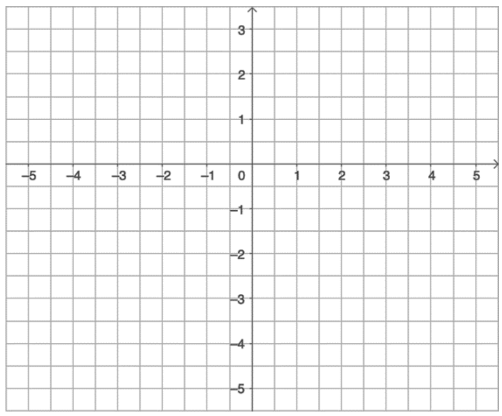
On considère les points $E(1\,;-1)$, $F(5\,;3)$, $C(3\,;1)$ et $H(2\,;3)$.

1. Représentez ces points sur la figure ci-contre.

2. Démontrez que C est le milieu du segment $[EF]$.

3. Quelles sont les coordonnées du point G tel que C soit le milieu de $[HG]$?

4. Quelle est la nature du quadrilatère $EGFH$?



Solutions possibles de l'exercice de géométrie repérée

2. On a :

$$\frac{x_E + x_F}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 = x_C$$

$$\frac{y_E + y_F}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 = y_C$$

Les coordonnées du milieu du segment $[EF]$ sont égales aux coordonnées de C. Donc C est le milieu de $[EF]$.

3. C est le milieu de $[HG]$, donc G est le symétrique de H par rapport à C. Donc :

$$x_G = 2 \times x_C - x_H = 2 \times 3 - 2 = 4$$

$$y_G = 2 \times y_C - y_H = 2 \times 1 - 3 = -1$$

Les coordonnées de G sont $(4\,;-1)$.

4. <u>Propriété</u> : si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

C est le milieu des segments $[EF]$ et $[HG]$, donc $EGFH$ est un parallélogramme.